La méthode du multiplicateur de Lagrange

Mathieu Reibel

February 18, 2023

On a une fonction à plusieurs variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et on cherche à connaître son maximum ou minimum. Dans le cas où toutes les variables de la fonction sont indépendantes entre elles, il suffit de chercher là où le gradient est nul.

Cependant, lorsque les variables dépendent les unes des autres, cette méthode devient caduque. Dans ce cas, on peut utiliser la méthode du multiplicateur de Lagrange pour prendre en compte ce qu'on appelle les contraintes.

Une contrainte est une équation $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ qui doit être satisfaite par les variables de la fonction dont on cherche l'extremum.

La méthode du multiplicateur de Lagrange permet de prendre en compte ces m contraintes en introduisant des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ associés à chaque équation de contrainte. Ces λ sont des multiplicateurs de Lagrange. Ensuite, on définit une nouvelle fonction L appelée fonction de Lagrange telle que :

$$\begin{aligned} &L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &+ \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_2 g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

La fonction de Lagrange est une fonction qui combine la fonction initiale $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et une combinaison linéaire des fonctions g. Ensuite, on calcule le gradient de la fonction de Lagrange et on cherche où il s'annule pour trouver les points où la fonction initiale est maximale/minimale sous les contraintes données.

Remarque : Le gradient de la fonction de Lagrange se calcule dans l'espace abstrait des variables x_1, x_2, ..., x_n et des multiplicateurs de Lagrange.

Par exemple, on veut trouver le maximum de la fonction $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sous la contrainte $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Tout d'abord, formons la fonction de Lagrange :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Ensuite, calculons le gradient de L dans l'espace abstrait des deux variables x_1, x_2 et du multiplicateur de Lagrange λ:

$$\nabla L = \left(\tfrac{\partial L}{\partial x_1},\ \tfrac{\partial L}{\partial x_2},\ \tfrac{\partial L}{\partial \lambda}\right) = \left(1 - 2\lambda x_1,\ 1 - 2\lambda x_2,\ x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$

On cherche les points qui annulent le gradient :

$$1 - 2\lambda x_1 = 0, \quad 1 - 2\lambda x_2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

En résolvant ces équations, on a $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Par conséquent, le point $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ maximise la fonction $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sous la contrainte $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1$.